

Un cadran solaire dont les lignes horaires dessinent la Terre

Joachim Heierli

Wagenstrasse 16, CH – 8200 Schaffhausen

joachim.heierli@sonneundzeit.ch – www.sonneundzeit.ch

Juin 2020

15

Bulletin SSC n° 89

L'étude des cadrans solaires est une très ancienne discipline des sciences. Les plus grands développements datent de l'Antiquité et du Moyen Âge, mais des chercheurs modernes ont également apporté leur part. En 1956, Heinz Schilt, un élève de l'illustre physicien Wolfgang Pauli, construisit un cadran solaire sous-marin dans la piscine de son jardin. Les lignes horaires de ce cadran étaient pour le moins inhabituelles. L'approche est développée dans cet article et combinée avec le concept géométrique de la projection gnomonique de Thalès. Ensemble, cela conduit à un très beau résultat: la loi de Snell-Descartes peut être utilisée pour construire un cadran solaire dont les lignes horaires dessinent la Terre et ses méridiens. Un prototype a été construit pour démontrer l'idée.

Introduction

Depuis l'époque babylonienne, les cadrans solaires font partie des sciences et de la civilisation. Aucun autre instrument de mesure n'a eu un impact aussi durable et aussi profond sur la vie publique et sur les habitudes du genre humain. Dans l'Antiquité, la plupart des cadrans solaires affichaient des heures de durée inégale jusqu'à ce qu'un esprit fût du Moyen Âge songea à utiliser l'angle horaire du Soleil pour mesurer le temps. Qui que ce fut, il demeura inconnu (Bilfinger 1892; Drecker 1925; Turner 1989). L'idée constituait un progrès considérable en matière de chronométrie et aida à résoudre un problème de grande importance au 15^e siècle: la synchronisation des horloges mécaniques encore loin d'être parfaites. L'angle horaire constituait une mesure du temps bien supérieure aux mesures utilisées précédemment. En conséquence, les heures de l'année étaient de durée presque égale, avec des fluctuations de moins de 1.3 secondes. Cela valut à la nouvelle mesure la désignation d'*horae aequales*. Qui plus est, l'angle horaire était mesurable partout et restait toujours en phase avec la lumière du jour. De nos jours, l'angle horaire du Soleil est appelé *temps solaire vrai*. Du 16^e au 19^e siècle, il demeura la norme en chronométrie, puis fut remplacé par le temps solaire moyen (Hennig 1976). Au 20^e siècle, des signaux de référence de plus en plus précis furent développés: d'abord l'horloge à quartz puis l'horloge atomique au césium (Brouwer 1951; Bauch 2018; Audoin et al. 2001).

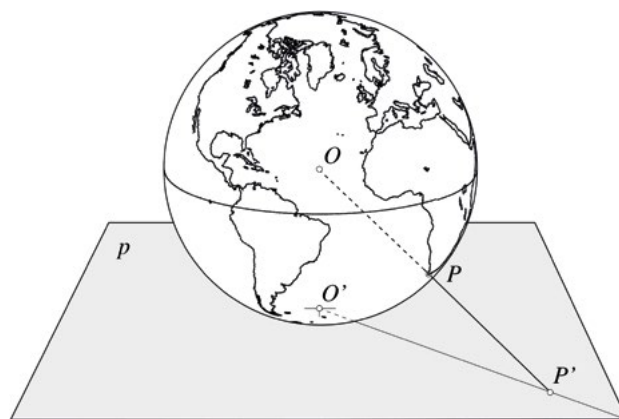


Fig. 1: La projection d'une sphère de centre O sur un plan tangent p est appelée projection gnomonique lorsque le centre de projection est confondu avec le centre de la sphère. La projection associée au point P de la sphère (ici, le Cap de Bonne-Espérance) le point P' dans le plan tangent. Les grands cercles de la sphère sont toujours représentés par des droites.

La plupart des cadrans solaires actuels utilisent une projection gnomonique (Fig. 1, Snyder 1987) pour faire apparaître le temps solaire vrai sur une surface plane. Sur ces cadrans-là, les lignes horaires sont représentées par des droites. Dans cet article, nous désignerons ce genre de cadrans sous le terme de *classique*. Leurs lignes horaires sont obtenues à partir d'une projection gnomonique d'un système de plans

horaires alignés avec l'axe polaire de la Terre. L'époque à laquelle les cadrans classiques furent inventés n'est du reste pas bien connue. Ils sont très rapidement devenus populaires en Europe au 15^e et au 16^e siècles (Turner 1989, Philipp et al. 1994). Ils étaient à la fois simples à construire et faciles à lire. On les a même considérés comme la forme finale et parfaite du cadran solaire, sans qu'il ne reste rien à améliorer ou à inventer (Rohr 1996, p. 15-16).

Pour chaque point sur la surface de la Terre à l'exception des pôles, le temps solaire vrai t est défini comme l'angle horaire du Soleil h plus un demi-tour (ou un demi-jour), tel que $t = h + 12\text{h}$ (Meyer 2008; Waught 1973). L'angle horaire est représenté par la différence entre la longitude du Soleil et la longitude de l'observateur, mesurée en vingt-quatrième d'un tour complet. La contrepartie terrestre de l'angle horaire est la longitude géographique, mesurée par rapport à Greenwich. Bien que l'angle horaire et la longitude servent à mesurer différentes choses (la position d'un objet céleste pour le premier, la position d'un objet terrestre pour le second), ils ne diffèrent que par une constante additive.

Ainsi, les lignes horaires (lignes d'angle horaire égal) d'un cadran solaire sont étroitement liées aux méridiens de la Terre (lignes de longitude égale). Pourtant, ce lien n'apparaît pas sur les cadrans solaires classiques: dû à la distorsion caractéristique de la projection gnomonique, peu de gens reconnaissent la Terre dans le dessin des lignes horaires (Fig. 2). Un défi consiste donc à concevoir un cadran solaire qui révèle les méridiens terrestres de façon naturelle et évidente. Une solution géométrique à ce problème est connue depuis l'Antiquité: elle consiste à donner une forme sphérique à la surface qui reçoit l'ombre du gnomon. Cette surface peut être pleine (Schumacher 1978) ou creuse (Flück et al. 2016; Feustel 2018). Ce type de cadran solaire, appelé *cadran solaire sphérique*, représente un modèle réduit congruent – et donc très reconnaissable – de la Terre et de ses méridiens. Il est intéressant de noter qu'il existe également, à côté de cette solution géométrique, une solution physique à ce problème. Cette solution physique sera développée par la suite. Elle maintient la surface réceptrice plane du cadran classique. Le point de départ est un cadran solaire sous-marin qui fut construit en 1956 par Heinz Schilt, un étudiant de l'illustre physicien Wolfgang Pauli. Ce cadran avait ses lignes horaires dessinées au fond d'un bassin d'eau, tandis que le gnomon consistait en une perturbation de la surface de l'eau (Schilt 1985). Contrairement aux lignes horaires du cadran solaire classique, les lignes horaires du cadran de Schilt apparaissent courbées.

Remodelage des lignes horaires par la loi de Snell-Descartes

Comme le démontre le cadran solaire de Schilt, les propriétés réfractives de l'eau fournissent un moyen pour

remodeler les lignes horaires d'un cadran solaire. La première étape du procédé consiste à compléter la définition usuelle du cadran solaire « un cadran consiste en un objet projetant une ombre sur une surface portant une échelle » (Turner 1989; Rohr 1996, p. 44) pour inclure « avec un milieu réfringent entre-deux ». L'utilisation d'un milieu autre que l'air donne au fabricant d'un cadran solaire un degré de liberté supplémentaire qui lui permet de rediriger les rayons du soleil selon les possibilités offertes par la loi de Snell. Ceci peut être utilisé de plusieurs manières: par exemple, pour recréer le « Miracle d'Ahaz » où le temps indiqué par un cadran solaire recula soudain d'une heure (Sadler 1995; Holden 1995). Ou bien, comme nous l'envisageons ici, pour remodeler les lignes horaires et faire apparaître la Terre. Un petit nombre de cadrans solaires utilisant le principe de la réfraction ont été construits ou proposés, mais aucun d'eux ne vise à faire apparaître la Terre au-travers des lignes horaires.

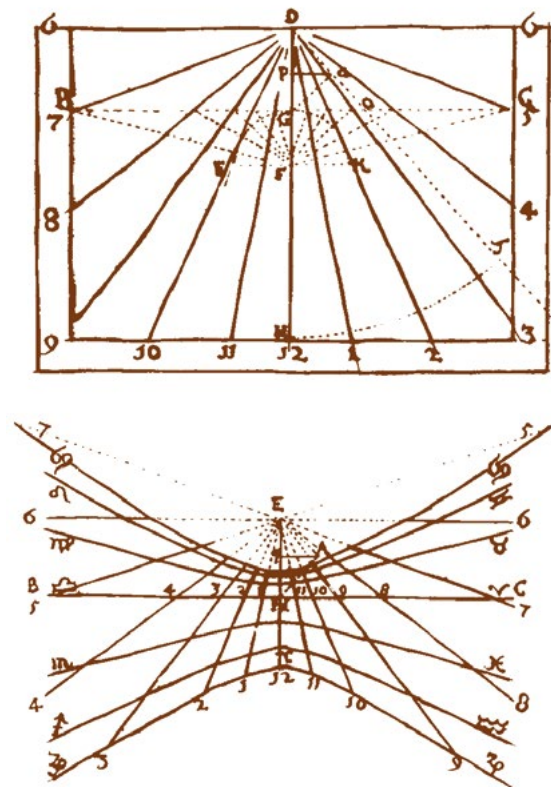


Fig. 2: Lignes d'un cadran solaire classique faisant face au sud, d'après un original de Hans Jakob Fäsi (Fäsi 1697). Le dessin du haut montre les lignes horaires seulement, celui du bas montre à la fois les lignes horaires (droites) et les lignes de déclinaison (coniques). La Terre n'apparaît pas dans le dessin des lignes.

L'analyse qui suit est basée sur un résultat d'optique géométrique (Fig. 3): l'ensemble de tous les rayons de lumière se propageant dans un plan h , incident en O sur

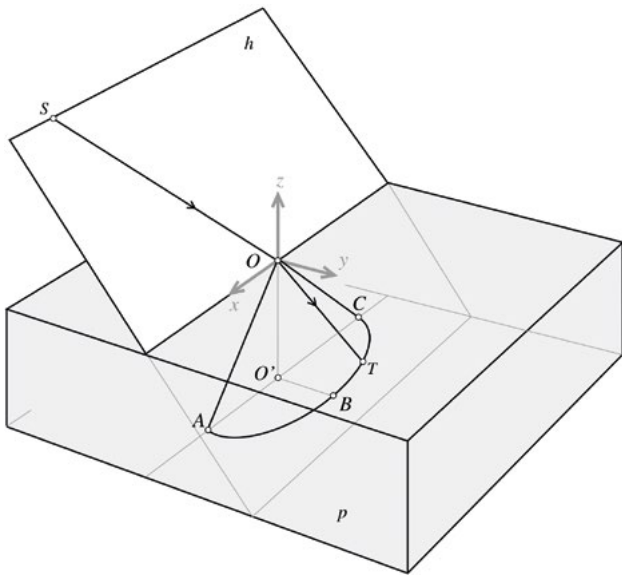


Fig. 3 : Réfraction d'un faisceau lumineux se propageant dans le plan horaire h , incident en O sur une plaque à faces parallèles d'indice n . La ligne $S-O-T$ illustre le trajet d'un rayon. Le cône marque le lieu géométrique de tous les rayons réfractés en O . Les points A et C proviennent d'une incidence rasante le long de l'axe x (voir l'illustration). Le point B provient de l'incidence d'angle minimal dans le plan h .

une plaque à faces parallèles d'indice de réfraction n , forme un cône elliptique à l'intérieur de la plaque. Une preuve de cette assertion est donnée par Heierli (2019). La preuve est conçue de façon simple et peut être utilisée comme exercice de classe dans des cours d'optique ou de gnomonique. Si h est un plan horaire (c'est-à-dire un plan d'angle horaire constant h), une ligne horaire est formée à l'intersection de la surface conique réfractée associée à h et la base de la plaque à faces parallèles (en d'autres mots, si un rayon de soleil réfracté en O coupe cette ligne horaire, alors $t = h + 12$). La procédure peut être répétée pour les 23 plans horaires restants et l'on obtient de cette façon les vingt-quatre lignes horaires du cadran solaire.

D'un point de vue purement géométrique, la configuration représentée sur la figure 3 est une simple modification de la projection gnomonique de Thalès (Snyder 1989), avec la seule différence que les lignes de projection subissent une réfraction en O selon la loi de Snell-Descartes au lieu de continuer tout droit. Si l'indice de réfraction est porté à 1, la projection gnomonique conventionnelle est obtenue comme cas limite. Dans ce cas de figure, les lignes horaires convergent vers des droites et s'étendent jusqu'à l'infini. Pour $n > 1$, l'extension de l'image est finie et les lignes horaires deviennent des arcs

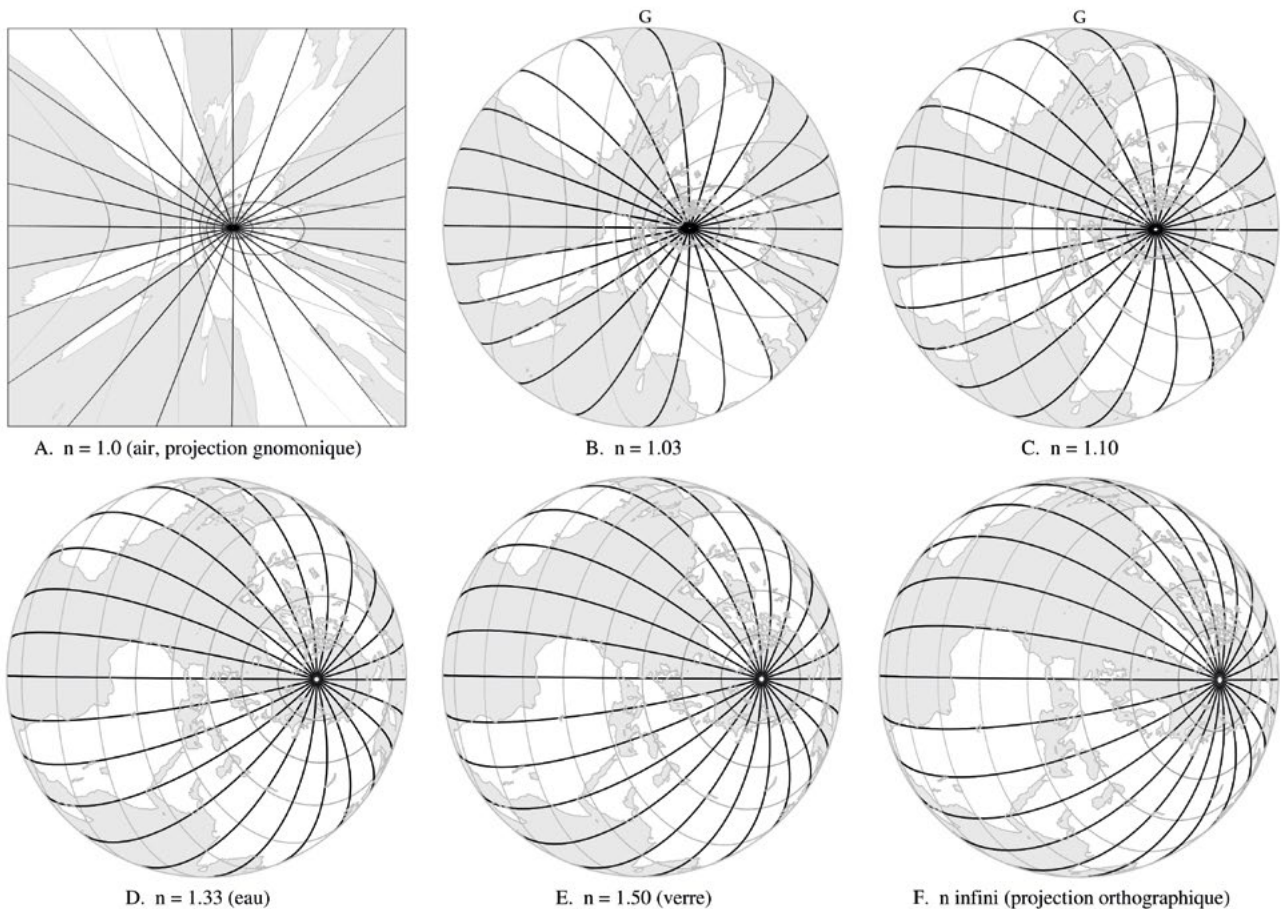


Fig. 4 : Géométrie des lignes horaires (lignes noires passant par le pôle) et des lignes de déclinaison (lignes grises tournant autour du pôle), en dépendance de l'indice de réfraction n . Les cartes géographiques correspondent aux lignes horaires pour un cadran solaire situé aux îles Galapagos (G), faisant face au sud-ouest. La forme elliptique des lignes horaires est bien visible. Sans cette caractéristique clé, les lignes horaires ne produiraient pas l'apparence de la Terre.

d'ellipse (Heierli 2019). Les centres de ces ellipses sont confondus. La longueur des demi-grands axes ne dépend que de n . En d'autres termes, les demi-grands axes sont tous de même longueur fixée par le choix du matériau. La figure 4 montre les lignes horaires et les lignes de déclinaison du Soleil pour une gamme d'indices de réfraction. L'ellipticité des lignes horaires, bien visible dans la figure 4, est la propriété clé qui donne à l'image l'apparence de la Terre. En revanche, les formes des lignes de déclinaison sont assez fantaisistes, surtout pour n proche de 1. Pour rendre le lien étroit avec la Terre encore plus évident, les pourtours des continents ont été insérés dans l'image des lignes horaires par association des lignes horaires à la longitude et des lignes de déclinaison à la latitude.

Discussion

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les lignes horaires de l'heure solaire vraie convergent vers les lignes correspondantes d'un cadran solaire classique pour $n \rightarrow 1$. Il en est de même pour les lignes de déclinaison. La convergence est bien visible sur les cartes de la figure 4. Le cadran solaire classique est donc un cas limite de notre arrangement (Fig. 3). Pour n au-delà de 1, les lignes horaires sont forcées dans une enveloppe circulaire et dessinent l'image d'un globe terrestre (Fig. 4). Avec n proche de 1, le globe est encore passablement déformé, mais au fur et à mesure que n augmente, la distorsion décroît rapidement. Autour de $n = 1.5$, l'image du globe paraît déjà familière. Dans le cas limite où n approche l'infini, les distorsions disparaissent complètement et l'image converge vers une projection orthographique de la Terre. Du même coup, le cadran solaire ainsi formé converge vers une projection orthographique d'un cadran solaire sphérique. Ainsi, ce dernier, ou plus précisément sa projection orthographique, représente un deuxième cas limite de notre cadran solaire pour $n \rightarrow \infty$. La loi de Snell-Descartes réunit ainsi deux types de cadrans distincts : le cadran solaire sphérique de l'Antiquité et le cadran solaire classique du Moyen-Âge. Lorsque Heinz Schilt a conçu son cadran solaire sous-marin, il ne s'est sans doute pas rendu compte qu'il aurait pu faire apparaître l'image la Terre au fond de sa piscine (ou s'il s'en est rendu compte, il n'en a pas fait mention dans ses écritures). Cependant, dans son cas de figure, l'image de la Terre serait apparue à l'envers (image miroir) et, avec $n = 1.33$, l'indice de réfraction de l'eau, elle aurait eu une apparence un peu aplatie vers le centre (Fig. 4D).

Application

Pour démontrer l'idée, un prototype a été construit. Il a été conçu pour être placé sur le rebord d'une fenêtre ensoleillée. Son corps est constitué d'une épaisse plaque à faces parallèles en verre acrylique, orientée verticalement. L'orienta-

tion aurait tout aussi bien pu être horizontale ou inclinée. La face côté Soleil est translucide à l'exception d'un petit oculus autour de O , dont la surface polie est transparente. Le côté opposé au Soleil est muni d'un verre dépoli dont le but est de visualiser le faisceau de lumière passant par l'oculus. Les lignes horaires de l'horloge sont tracées sur la surface de ce verre. Nous y avons tracé non seulement les lignes horaires de l'heure solaire vraie, mais aussi celles de l'heure légale (cela évite de convertir l'heure solaire en heure légale à chaque lecture). Ces lignes horaires sont facilement construites à partir des lignes horaires de l'heure solaire vraie en utilisant l'équation du temps et en supposant les paramètres orbitaux de la Terre constants. Elles forment la boucle en forme en huit bien connue des horlogers (Blatter 1994 ; Gangui et al. 2018).

La figure 5 montre une comparaison des lignes d'un cadran solaire classique (avec un indice de réfraction de 1) et de l'appareil proposé (avec un indice de réfraction de 1.5). L'image est calculée pour un observateur situé du côté opposé au Soleil. Les moitiés inférieures des lignes horaires sont entièrement fonctionnelles, indiquant le temps en présence du Soleil. Leurs points correspondent à une position du Soleil au-dessus de l'horizon mathématique. Les moitiés supérieures des lignes horaires correspondent à une position du Soleil sous l'horizon. Ainsi, ces lignes ne sont pas fonctionnelles. Elles sont incluses pour faire apparaître de dessin de la Terre sur le cadran. Grâce à elles, le cadran révèle les méridiens terrestres de façon naturelle et évidente. Il permet de visualiser la position du Soleil par rapport à la Terre, un peu comme un planétarium, mais sans avoir recours à des pièces mobiles (sauf les corps astronomiques bien entendu). Le prototype est illustré en figure 6. Une plaque à faces parallèles avec un indice de réfraction de 1.49 a été utilisée pour sa construction. Les rivages des continents ne sont pas montrés sur ce modèle : la Terre et sa position dans l'espace apparaissent seules au-travers de l'orientation des lignes de l'heure solaire vraie. Le prototype indique le temps avec une précision de ± 1 min dans la zone centrale du cadran et un peu moins plus près des bords. C'est la précision attendue pour un cadran solaire de petites dimensions.

Conclusion

Un cadran solaire original a été présenté. La nouveauté consiste en la réalisation de lignes horaires elliptiques dessinant la Terre et son réseau de lignes de longitude. Le cadran forme ainsi un modèle réduit bidimensionnel du système Terre-Soleil. Sa construction est basée sur une modification de la projection gnomonique de Thalès utilisant la loi de Snell-Descartes pour réfracter les lignes de projection en son centre de projection. L'apparence des lignes horaires dépend de l'indice de réfraction n d'une plaque à faces parallèles insérée entre le gnomon et la surface réceptrice de l'ombre. Pour $n = 1$, les lignes horaires convergent vers celles

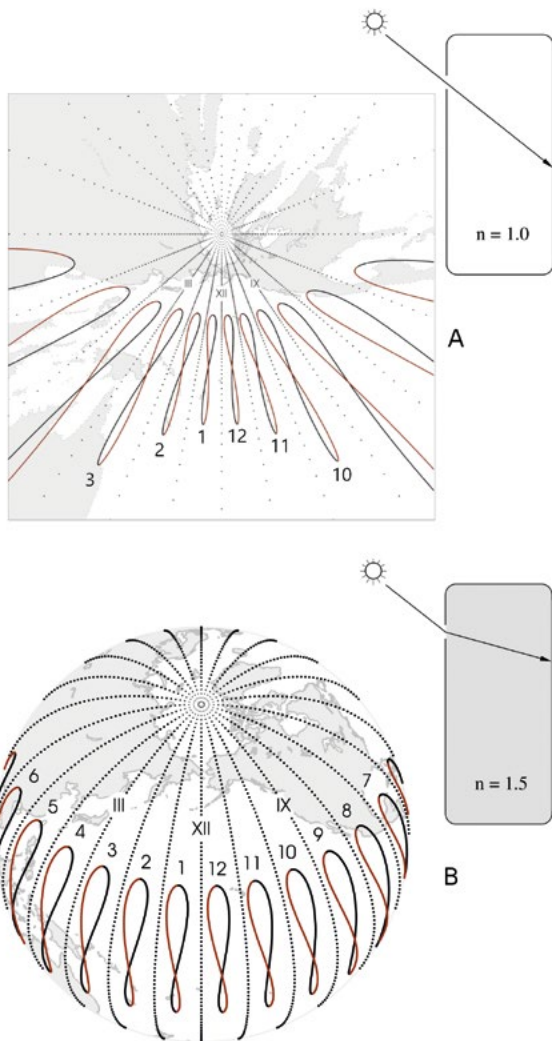


Fig. 5: Lignes horaires de l'heure solaire vraie (en pointillé) et de l'heure légale (boucles rouge-noir) pour un cadran à Zurich d'exposition sud. (A) Cadran classique résultant d'un indice de réfraction de 1. (B) Cadran résultant d'un indice de réfraction de 1.5. Les demi-boucles noires indiquent l'heure légale entre le solstice d'hiver et le solstice d'été, les demi-boucles rouges indiquent l'heure légale durant le reste de l'année.

du cadran solaire le plus populaire des temps modernes : le cadran solaire classique. Pour $n \rightarrow \infty$, elles convergent vers une image du cadran solaire le plus populaire de l'Antiquité : le cadran solaire sphérique. Entre ces deux cas limites, il existe une variété de possibilités pour configurer un cadran pour différentes valeurs de n . Plus la valeur de n est élevée, plus les lignes horaires ressemblent à une projection orthographique de la Terre. Plus la valeur de n est petite, plus elles ressemblent à une projection gnomonique de la Terre. Avec ses lignes horaires attrayantes et intuitives, le cadran solaire proposé pourrait devenir un digne nouveau membre de la vénérable famille des cadrans solaires.¹

¹ Cet article est une traduction abrégée d'un travail paru en anglais dans *American Journal of Physics* (Référence 11).



Fig. 6: Prototype du cadran pour Zurich (47,37 N, 8,53 E), avec une exposition sud. La taille de l'appareil est de 15 cm × 15 cm × 6 cm. Le cadran solaire indique à la fois l'heure solaire vraie et l'heure d'Europe centrale (CET). L'heure est lue au centre du point lumineux formé par le passage des rayons du soleil par O . Dans l'exemple, le cadran indique le vrai midi (heure solaire vraie $t = 12$ heures, angle horaire $h = 0$). Les continents ne sont pas représentés sur ce modèle : la Terre et sa position dans l'espace apparaissent seules au-travers de l'orientation des lignes de l'heure solaire vraie.

Littérature

- [1] AUDOIN, C./GUINOT, B.: *The measurement of time: Time, frequency and the atomic clock*, Cambridge University Press New York 2001.
- [2] BAUCH, A.: «Atomare Definition der Zeiteinheit 1967-2017», in: *Jahresschrift 2018 der Deutschen Gesellschaft für Chronometrie* 57, 2018, p. 35-50.
- [3] BILFINGER, G.: *Die mittelalterlichen Horen und die modernen Stunden*, Kohlhammer Stuttgart 1892, p. 175.
- [4] BLATTER, C.: «Von den Keplerschen Gesetzen zu einer minuten-genauen Sonnenuhr», *Elem. Math.* 49, 1994, p. 155-165.
- [5] BROUWER, D.: «The accurate measurement of time», in: *Physics Today* 4, 1951, p. 6-15.
- [6] DRECKER, J.: *Die Theorie der Sonnenuhren*, De Gruyter Berlin 1925.
- [7] FÄSI, H. J.: *Deliciae Astronomicae*, Bodmer Zürich 1697.
- [8] FEUSTEL, O.: «Analyse der Hohlhalbkugel-Sonnenuhr im Vatikanischen Museum», in: *Jahresschrift 2018 der Deutschen Gesellschaft für Chronometrie* 57, 2018, p. 153-172.
- [9] FLÜCK, H./GAUTSCHY, R.: «Zwei Sonnenuhren aus Vindonissa – archäologisch, archivalisch und astronomisch betrachtet», in: *Jahresbericht Gesellschaft Pro Vindonissa*, 2016, p. 2-23.
- [10] GANGUI, A./LASTRA, C./KARASEUR, F.: «On Times and Shadows: The Observational Analemma», *The Physics Teacher* 56, 2018, p. 367-369.

- [11] HEIERLI, J.: «A sundial with hour lines portraying the Earth», *Am. J. Phys.* 87(12), 2019, p. 955-960.
- [12] HENNIG, R.: «Sonnenuhren in Genf», in: *Schweizerische Bauzeitung* 38, Sonderdruck, 1976, p. 1-3.
- [13] HOLDEN, C.: «Recreating the Miracle of Ahaz», *Science* 267(5204), 1995, p. 1599.
- [14] MEYER, J.: *Die Sonnenuhr und ihre Theorie*, Harri Deutsch Frankfurt am Main 2008, p. 78.
- [15] PHILIPP, H./ROTH, D./BACHMANN, W.: *Sonnenuhren Deutschland und Schweiz*, DGC Stuttgart 1994.
- [16] ROHR, R. R. J.: *Sundials History, Theory, Practice*, Dover New York 1996.
- [17] SADLER, P. M.: «An ancient time machine: The Dial of Ahaz», in: *Am. J. Phys.* 63, 1995, p. 211-216.
- [18] SCHILT, H.: *Ebene Sonnenuhren*, Biel 1985, p. 30-32.
- [19] SCHUMACHER, H.: *Sonnenuhren*, Callwey München 1978, p. 113.
- [20] SNYDER, J. P.: «Map Projections A Working Manual». *U.S. Geological Survey Professional Paper 1395*, U.S. Government Printing Office Washington DC 1987, p. 164-168.
- [21] SNYDER, J. P./VOXLAND, P. M.: «An album of map projections». *U.S. Geological Survey Professional Paper 1453*, U.S. Government Printing Office Washington DC, 1989.
- [22] TURNER, A. J.: «Sun-dials: History and classification», in: *Hist. Sci.*, 27, 1989, p. 303-318.
- [23] WAHR, J. M.: «The Earth's rotation», *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 16, 1988, p. 231-249.
- [24] WAUGHT, A. E.: *Sundials: their theory and construction*, Dover New York, p. 120.

Bulletin SSC

La publication des professionnels
du monde horloger

Cet article nous a été spontanément soumis par un lecteur.

Vous aussi, vous souhaitez publier un texte dans une de nos rubriques ?

N'hésitez plus et contactez-nous !

SSC
Rue Jaquet-Droz 1
CH – 2002 Neuchâtel
032 720 50 79
begonia.tora@ssc.ch